



第 5 章 机械振动

物

体在某固定位置附近的往复运动叫作**机械振动**,它是物体一种普遍的运动形式.例如活塞的往复运动、树叶在空气中的抖动、琴弦的振动、心脏的跳动等都是振动.物体在受到打击,或摇摆、颠簸、发声时必有振动.任何一个具有质量和弹性的系统在其运动状态发生突变时都会发生振动.

广义地说,任何一个物理量在某一量值附近随时间作周期性变化都可以叫作**振动**.例如交流电路中的电流、电压,振荡电路中的电场强度和磁场强度等均随时间作周期性的变化,因此都可以称为**振动**.这种振动虽然和机械振动有本质的不同,但它们都具有相同的数学特征和运动规律.所以,振动不仅是声学、地震学、建筑学、机械制造等必需的基础知识,也是电学、光学、无线电学的基础.

本章主要讨论简谐振动和振动的合成,并简要介绍阻尼振动、受迫振动和共振现象.



本章提要



非线性振动简介

5.1 简谐振动的动力学特征

简谐振动是振动中最基本最简单的振动形式,任何一个复杂的振动都可以看成是若干个或是无限多个简谐振动的合成。

一个作往复运动的物体,如果其偏离平衡位置的位移 x (或角位移 θ) 随时间 t 按余弦(或正弦)规律变化,即

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.1)$$

则这种振动称为**简谐振动**。

研究表明,作简谐振动的物体(或系统),尽管描述它们偏离平衡位置位移的物理量可以千差万别,但描述它们动力学特征的运动微分方程却完全相同。

5.1.1 弹簧振子模型

将轻弹簧(质量可忽略不计)一端固定,另一端与质量为 m 的物体(可视为质点)相连,若该系统在振动过程中弹簧的形变较小(即形变弹簧作用于物体的力总是满足胡克定律),那么,这样的弹簧—物体系统称为**弹簧振子**。

如图 5.1 所示,将弹簧振子水平放置,使振子在水平光滑支撑面上振动。以弹簧处于自然状态(弹簧既未伸长也未压缩的状态)的稳定平衡位置为坐标原点,当振子偏离平衡位置的位移为 x 时,其受到的弹力作用为

$$F = -kx \quad (5.2)$$

式中 k 为弹簧的倔强系数,负号表示弹力的方向与振子的位移方向相反。即振子在运动过程中受到的力总是指向平衡位置,且力的大小与振子偏离平衡位置的位移成正比,这种力就称之为**线性回复力**。

如果不计阻力(如振子与支撑面的摩擦力,在空气中运动时受到的介质阻力及其他能量损耗),则振子的运动微分方程为

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\text{令} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (5.3)$$

$$\text{则有} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (5.4)$$



简谐振动的特征

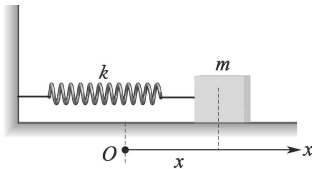


图 5.1 弹簧振子

式(5.4)的解就是式(5.1)^①,可知式(5.4)就是描述简谐振动的运动微分方程.由此可以给出简谐振动的一种较普遍的定义:如某力学系统的动力学方程可归结为式(5.4)的形式,且其中 ω 仅决定于振动系统本身的性质,则该系统的运动即为简谐振动.能满足式(5.4)的系统,又可称为谐振子系统.

5.1.2 微振动的简谐近似

上述弹簧振子(谐振子)是一个理想模型.实际发生的振动大多较为复杂,一方面回复力可能不是弹力,而是重力、浮力或其他力;另一方面回复力可能是非线性的,只能在一定条件下才可近似当作线性回复力,例如单摆、复摆、扭摆等.

一端固定且不可伸长的细线与可视为质点的物体相连,当它在竖直平面内作小角度($\theta \leq 5^\circ$)摆动时,该系统称为单摆,如图5.2所示.

以摆球为研究对象,单摆的运动可看作绕过C点的水平轴转动.显然,摆球在铅直方向CO处为稳定平衡位置(即回复力为零的位置).当摆线偏离铅直方向 θ 角时(θ 此处又称角位移),摆球受到重力 P 与绳拉力 T 的合力,对过C点水平轴的力矩为

$$M = -mgl \sin \theta \quad (5.5)$$

式中负号表示力矩的方向总是与角位移的方向相反,将 θ 值用弧度表示,在 $\theta \leq 5^\circ$ 时,则有 $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots$,略去高阶无穷小,式(5.5)可近似简化为

$$M = -mgl\theta \quad (5.6)$$

此时的回复力矩与角位移成正比而反向.

若不计阻力,由转动定律可写出摆球的动力学方程为

$$-mgl\theta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

令

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (5.7)$$

则有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (5.8)$$

即单摆的小角度摆动是简谐振动.

绕不过质心的水平固定轴转动的刚体称为复摆^②,如图5.3所

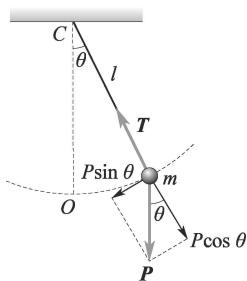


图 5.2 单摆

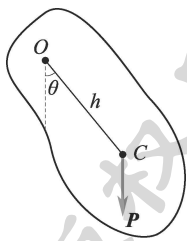


图 5.3 复摆

① 根据微分方程理论,式(5.4)的通解为 $x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = A\cos(\omega t + \varphi_0) + iA\sin(\omega t + \varphi_0)$.在经典物理中只用实数部分表示物理量,描述机械振动通常用余弦函数,所以式(5.4)的解取式(5.1).

② 若悬线长 l 与“摆球”的线度 r 不满足 $l \gg r$,亦称为复摆.

示. 质心 C 在铅直位置时为平衡位置, 以质心 C 至轴心 O 的距离 h 为摆长, 同上分析, 当 $\theta \leq 5^\circ$ 时复摆的动力学方程为

$$-mgh\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5.9)$$

$$\text{令} \quad \omega^2 = \frac{mgh}{J} \quad (5.10)$$

式中 J 为刚体对过 O 点水平轴的转动惯量, 于是式 (5.9) 亦可归为式 (5.8).

由上述讨论可知, 单摆或复摆在小角度摆动情况下, 经过近似处理, 它们的运动方程与弹簧振子的运动方程具有完全相同的数学形式, 即式 (5.4)、式 (5.8). 进一步的研究表明, 任何一个物理量 (例如长度、角度、电流、电压以及化学反应中某种化学组分的浓度等) 的变化规律凡满足式 (5.4), 且常量 ω 决定于系统本身的性质, 则该物理量作简谐振动.

例 5.1

一质量为 m 的物体悬挂于轻弹簧下端, 不计空气阻力, 试证其在平衡位置附近的振动是简谐振动.

证 如图 5.4 所示, 以平衡位置 A 为原点, 向下为 x 轴正向, 设某一瞬时振子的坐标为 x , 则物体在振动过程中的运动方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x+l) + mg$$

式中 l 是弹簧挂上重物后的静伸长, 因为 $mg = kl$, 所以上式为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\text{即为} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

式中 $\omega^2 = \frac{k}{m}$. 于是该系统作简谐振动.

上例说明: 若一个谐振子系统受到一个恒力 (以使系统中不出现非线性因素为限) 作用, 只要将其坐标原点移至恒力作用下新的

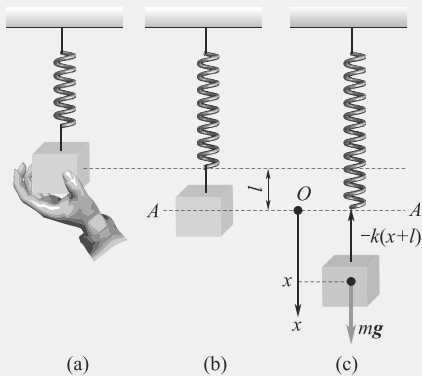


图 5.4

平衡位置, 则该系统仍是一个与原系统动力学特征相同的谐振子系统. 此时的回复力 $-k(x+l) + mg$ 称为准弹性力.

5.2 简谐振动的运动学

5.2.1 简谐振动的运动学方程

如前所述,微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

的解可写作

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.11)$$

式中 A 和 φ_0 是由初始条件确定的两个积分常数. 式(5.11) 称为简谐振动的运动学方程.

由于 $\cos(\omega t + \varphi_0) = \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$

令

$$\varphi' = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$$

则式(5.11) 亦可写成

$$x = A \sin(\omega t + \varphi')$$

可见简谐振动的运动规律也可用正弦函数表示. 本教材对机械振动统一用余弦函数表示.

5.2.2 描述简谐振动的三个重要参量

1. 振幅 A

按简谐振动运动学方程, 物体的最大位移不能超过 A , 物体偏离平衡位置的最大位移(或角位移) 的绝对值叫作**振幅**. 显然, 振幅 A 是由初始条件决定.

简谐振动的运动学方程和它对时间的一阶导数(简谐振动的速度方程) 分别如下:

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \quad (5.12)$$

将初始条件 $t = 0, x = x_0, v = v_0$ 代入, 得

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0 \\ -\frac{v_0}{\omega} = A \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (5.13)$$

取二式平方和, 即求出振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (5.14)$$

例如,当 $t = 0$ 时,物体位移为 x_0 ,而振速为零,此时的 $|x_0|$ 即为振幅,又 $t = 0$ 时,物体在平衡位置,而初速为 v_0 ,则 $A = |\frac{v_0}{\omega}|$,可见此时初速越大,振幅越大.

2. 周期、频率、圆频率

物体作简谐振动时,周而复始完成一次全振动所需的时间叫作简谐振动的周期,用 T 表示.由周期函数的性质,有

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t + \varphi_0) &= A\cos[\omega(t + T) + \varphi_0] \\ &= A\cos(\omega t + \varphi_0 + 2\pi) \end{aligned}$$

由此可知
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.15)$$

和周期密切相关的另一物理量是频率,即单位时间内系统所完成的完全振动的次数,用 ν 表示

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.16)$$

在国际单位制中, ν 的单位是“赫兹”(符号是 Hz).

由式(5.16),有

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (5.17)$$

表示系统在 2π s 内完成的完全振动的次数,称为圆频率(又称角频率).由上节讨论可知,简谐振动的圆频率 ω 是由系统的力学性质决定的,故又称之为固有(本征)圆频率.例如:

弹簧振子
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

单摆
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

复摆
$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

由此确定的振动周期称之为固有(本征)周期.例如:

弹簧振子
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.18)$$

单摆
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.19)$$

复摆
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}} \quad (5.20)$$

3. 相位和初相位

简谐振动的振幅确定了振动的范围,频率或周期则描绘了振动的快慢.不过仅有参量 A 和 ω 还不能确切告诉我们振动系统在任意瞬时的运动状态.式(5.12)表明,只有在 A 、 ω 、 φ_0 为已知时,系统的振动状态才是完全确定的.能确定系统任意时刻振动状态的物理量

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (5.21)$$

叫作简谐振动的**相位**(或称**周相**). 例如, 由式(5.12)可知, 当相位 $(\omega t_1 + \varphi_0) = \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $x = 0, v = -\omega A$, 其表明系统此时的振动状态是: 振子处于平衡位置并以速率 ωA 向 x 轴负方向运动; 当相位 $(\omega t_2 + \varphi_0) = 3\pi/2$ 时, 有 $x = 0, v = \omega A$, 此时系统的振动状态为: 振子处于平衡位置并以速率 ωA 向 x 轴正向运动. 可见, 在 t_1 和 t_2 时刻, 振动相位不同, 系统的振动状态就不相同. 反之, 系统一个确定的振动状态必与一个确定的振动相位对应. 例如, 若某时刻系统的位移为 $x = A/2$, 而速度 $v > 0$ (即向正最大位移方向移动), 则由式(5.12)可推知, 与此运动状态对应的振动相位为 $\varphi = -\pi/3$ (或 $5\pi/3$).

两振动相位之差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, 称作**相位差**. 若相位差等于零或 2π 的整数倍, 则称两振动相位相同(或同相), 如果两振动的振幅和频率也相同, 则表明此时它们的振动状态相同; 若 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, 则称两振动的相位相反(或反相), 表明它们的运动状态相反; 若 $0 < \Delta\varphi < \pi$, 则称 φ_2 超前于 φ_1 , 或说 φ_1 滞后于 φ_2 . 总之, 相位差的不同, 反映了两个振动不同程度的参差错落.

用相位表征简谐振动的运动状态还能充分地反映简谐振动的周期性. 简谐振动在一个周期内所经历的运动状态每时每刻都不相同, 从相位来理解, 这相当于相位经历了从 0 到 2π 的变化过程. 因此, 对于一个以某个振幅和频率振动的系统, 若它们的运动状态相同, 则它们所对应的相位差必定为 2π 或 2π 的整数倍.

$t = 0$ 时的相位叫**初相位**. 由式(5.13)可得

$$\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad (5.22)$$

可见, 初相位也是由初始条件确定.

由式(5.22)求出的值, 代入式(5.12), 使两式均成立的 φ_0 值, 即为该振动的初相位值.

若已知振子的初始振动状态, 则可直接由式(5.12)分析得出其初相位. 例如, 若 $t = 0, x_0 = -A/2$, 而 $v < 0$, 由式(5.12)可推知, 与此振动状态对应的初相位为 $\varphi_0 = 2\pi/3$.

5.2.3 简谐振动的旋转矢量表示法

在研究简谐振动问题时, 常采用一种较为直观的几何方法, 即**旋转矢量表示法**.

如图 5.5 所示, 从坐标原点 O (平衡位置) 画一矢量 $\mathbf{A}$, 使它的模等于简谐振动的振幅 A , 并令 $t = 0$ 时 $\mathbf{A}$ 与 x 轴的夹角等于简谐振动的初相位 φ_0 , 然后使 $\mathbf{A}$ 以等于角频率 ω 的角速度在平面上绕 O 点作逆时针转动, 这样作出的矢量称为**旋转矢量**. 显然, 旋转矢量 $\mathbf{A}$ 任一

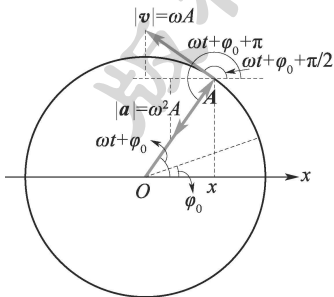


图 5.5

时刻在 x 轴上的投影 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 就描述了一个简谐振动, 矢端沿圆周运动的速度大小等于 ωA , 其方向与 x 轴的夹角等于 $(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$, 在 x 轴上的投影为 $\omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$, 这就是简谐振动的速度方程; 矢端作圆周运动的加速度为 $a_n = \omega^2 A$, 它与 x 轴的夹角为 $(\omega t + \varphi_0 + \pi)$, 所以加速度在 x 轴上的投影为

$$\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

以上讨论表明简谐振动速度的相位比位移超前 $\frac{\pi}{2}$, 加速度的相位比速度超前 $\frac{\pi}{2}$, 比位移超前 π .



旋转矢量法

例 5.2

弹簧振子沿 x 轴作简谐振动, 振幅为 0.4 m , 周期为 2 s , 当 $t = 0$ 时, 位移为 0.2 m , 且向 x 轴负方向运动. 求简谐振动的振动方程, 并画出 $t = 0$ 时的旋转矢量图.

解 设此简谐振动的振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则其速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

将 $A = 0.4\text{ m}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ 和 $t = 0$ 时,

$x_0 = 0.2\text{ m}$, 代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 得

$$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{3}$$

再由 $t = 0$ 时, $v_0 < 0$ 的条件, 得 $v_0 = -0.$

$4\pi \sin \varphi_0 < 0$, 所以

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

于是此简谐振动的振动方程为 $x = 0.$

$$4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) (\text{m})$$

$t = 0$ 时的旋转矢量图如图 5.6 所示.

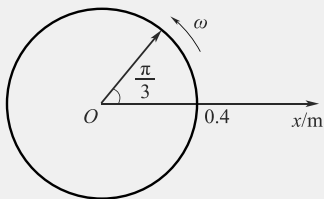


图 5.6

例 5.3

已知简谐振动曲线如图 5.7 所示, 试写出其振动方程.

解 设简谐振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

从图中易知 $A = 4\text{ cm}$, 下面只需求出 φ_0 和 ω 即可. 从图中分析可知, $t = 0$ 时, $x_0 = -2\text{ cm}$,

且 $v_0 = \frac{dx}{dt} < 0$ (由曲线的斜率决定), 代入振动方程, 有

$$-2 = 4\cos \varphi_0$$

故 $\varphi_0 = \pm \frac{2}{3}\pi$, 又由 $v_0 = -\omega A\sin \varphi_0 < 0$, 得

$\sin \varphi_0 > 0$, 因此只能取 $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$.

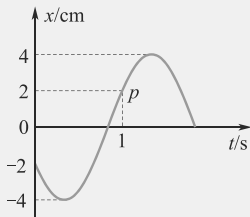


图 5.7 简谐振动曲线

再从图中分析, $t = 1\text{ s}$ 时, $x = 2\text{ cm}$, $v > 0$, 代入振动方程有

$$2 = 4\cos(\omega + \varphi_0) = 4\cos\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\text{即} \quad \cos\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

所以 $\omega + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ 或 $\frac{7}{3}\pi$ (应注意这里不能取 $\pm \frac{\pi}{3}$).

$$\text{因同时要满足 } v = -\omega A \sin\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right) > 0,$$

$$\text{即 } \sin\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right) < 0, \text{ 故应取 } \omega + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi,$$

即 $\omega = \pi$, 所以振动方程为

$$x = 4\cos\left(\pi t + \frac{2}{3}\pi\right) \text{ cm}$$

用旋转矢量法也可以简单地求出简谐振动的 φ_0 和 ω . 如图 5.8 所示, 在 $x-t$ 曲线的左侧作 Ox 轴与位移坐标轴平行, 由振动曲线可知, a, b 两点对应于 $t = 0 \text{ s}, 1 \text{ s}$ 时刻的振动状态, 可确定这两个时刻旋转矢量的位置分别为 $\vec{Oa}$ 和 $\vec{Ob}$. 下面作详细说明: 由 a 向 Ox 轴作

垂线, 其交点就是 $t = 0$ 时刻旋转矢量端点的投影点. 已知该处 $x_0 = -2 \text{ cm}$, 且此时刻 $v_0 < 0$, 故旋转矢量应在 Ox 轴左侧, 它与 Ox 轴正向的夹角 $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$, 就是 $t = 0$ 时刻的振动相位, 即初相; 又由 $x-t$ 曲线中 b 点向 Ox 轴作垂线, 其交点就是 $t = 1 \text{ s}$ 时刻旋转矢量端点的投影点, 该处 $x = 2 \text{ cm}$ 且 $v > 0$, 故此时刻旋转矢量应在 Ox 轴的右侧, 它与 Ox 轴的夹角 $\varphi = \frac{5}{3}\pi$ 就是该时刻的振动相位, 即 $\omega + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$, 解得 $\omega = \pi$.

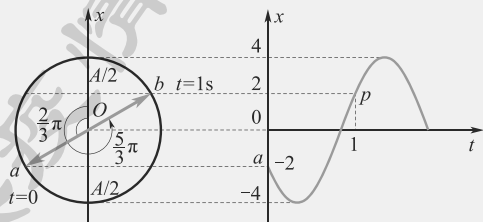


图 5.8

5.3 简谐振动的能量

下面以弹簧振子为例来说明简谐振动的能量.

设振子质量为 m , 弹簧的倔强系数为 k , 在某一时刻的位移为 x , 速率为 v , 即

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

于是振子所具有的振动动能和振动势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (5.23)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad (5.24)$$

这说明弹簧振子的动能和势能是按余弦或正弦函数的平方随时间变化的. 图 5.9 表示初相位 $\varphi_0 = 0$ 时, 简谐振子的动能、势能和总能量随时间变化的曲线. 显然, 动能最大时, 势能最小, 而动能最小时,

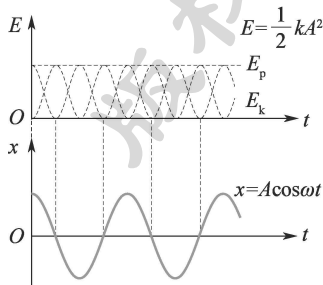


图 5.9 简谐振子的动能、势能和总能量随时间变化的曲线

势能最大. 简谐振动的过程正是动能和势能相互转换的过程.

将式(5.23)和式(5.24)相加, 即得简谐振动的总能量为

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 \quad (5.25)$$

即简谐振动系统在振动过程中机械能守恒. 从力学观点看, 这是因为做简谐振动的系统都是孤立的保守系统. 此外, 式(5.25)还说明简谐振动的能量正比于振幅的平方和系统固有角频率的平方.

动能和势能在一个周期内的平均值为

$$\begin{aligned} \overline{E_k} &= \frac{1}{T} \int_0^T E_k(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{1}{4}kA^2 \end{aligned}$$

同理, 有

$$\overline{E_p} = \frac{1}{4}kA^2$$

即

$$\overline{E_k} = \overline{E_p} = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E \quad (5.26)$$

动能和势能在一个周期内的平均值相等, 且均等于总能量的一半.

上述结论虽是从弹簧振子这一特例推出, 但具有普遍意义, 适用于任何一个谐振动系统.

对于实际的振动系统, 可以通过讨论它的势能曲线来研究其能否做简谐振动近似处理.

设系统沿 x 轴振动, 其势能函数为 $E_p(x)$, 如果势能曲线存在一个极小值, 该位置就是系统的稳定平衡位置. 在该位置(取 $x=0$)附近将势能函数用级数展开为

$$E_p(x) = E_p(0) + \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x=0} x^2 + \dots$$

由于在 $x=0$ 的平衡位置处有 $\frac{dE_p}{dx} = 0$, 若系统是作微振动, 当

$\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x=0} \neq 0$ 时, 可略去 x^3 以上高阶无穷小, 得到

$$E_p(x) \approx E_p(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x=0} x^2$$

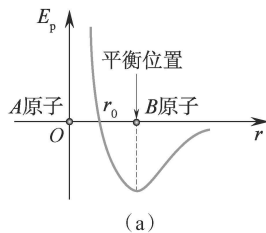
根据保守力与势能函数的关系 $F = -\frac{dE_p(x)}{dx}$, 将上式两边对 x 求导可得

$$F = - \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x=0} x (= -kx) \quad (5.27)$$

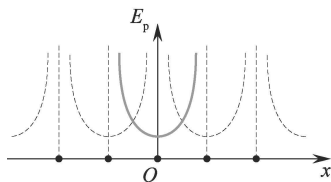
这说明, 一个微振动系统一般都可以当作谐振动处理. 图 5.10(a)、(b) 分别是双原子分子的势能曲线和晶体中晶格离子的势能曲线, 由上面讨论可知, 这些原子或离子在其平衡位置附近的振动都可当作简谐振动.



简谐振动的能量



(a)



(b)

图 5.10 双原子分子和晶格离子的势能曲线

例 5.4

如图 5.11 所示,光滑水平面上的弹簧振子由质量为 M 的木块和倔强系数为 k 的轻弹簧构成. 现有一个质量为 m , 速度为 u_0 的子弹射入静止的木块后陷入其中, 此时弹簧处于自由状态. (1) 试写出该谐振子的振动方程; (2) 求出 $x = \frac{A}{2}$ 处系统的动能和势能.

解 (1) 子弹射入木块过程中, 水平方向动量守恒. 设子弹陷入木块后两者的共同速度为 V_0 , 则有

$$mu_0 = (m + M)V_0$$

$$V_0 = \frac{m}{m + M}u_0$$

取弹簧处于自由状态时, 木块的平衡位置为坐标原点, 水平向右为 x 轴正方向, 并取木块和子弹一起开始向右运动的时刻为计时起点. 因此初始条件为 $x_0 = 0, v_0 = V_0 > 0$, 而子弹射入木块后简谐振动系统的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}}$$

设简谐振动系统的振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, 将初始条件代入得

$$\begin{cases} 0 = A\cos \varphi_0 \\ V_0 = -\omega A\sin \varphi_0 > 0 \end{cases}$$

联立求出 $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$

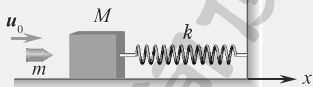


图 5.11

$$A = -\frac{V_0}{\omega \sin \varphi_0} = \frac{mu_0}{\sqrt{k(m + M)}}$$

所以简谐振子的振动方程为

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ &= \frac{mu_0}{\sqrt{k(m + M)}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m + M}}t + \frac{3}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

(2) $x = \frac{A}{2}$ 时简谐振动系统的势能和动能分别为

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{m^2u_0^2}{8(m + M)} \\ E_k &= E - E_p = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{8}kA^2 = \frac{3}{8}kA^2 \\ &= \frac{3m^2u_0^2}{8(m + M)} \end{aligned}$$

5.4 简谐振动的合成 * 振动的频谱分析

在实际问题中, 常常遇到一个物体同时参与两个或更多个振动的情况. 在一定条件下, 合振动的位移等于各个分振动位移的矢量和.

5.4.1 同方向同频率简谐振动的合成

设质点同时参与两个同方向同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

* 简谐振动的合成又可称为振动的叠加, 只有线性振动才能叠加. 因此, 本节的各种结论对非线性振动无效.



简谐振动的合成

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

因两分振动在同一方向上进行,故质点的合位移等于两个位移的代数和,即

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20}) \quad (5.28)$$

利用三角恒等式,上式可化为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

式中合振幅 A 和初相位 φ_0 值分别为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} \quad (5.29)$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}} \quad (5.30)$$

由此可见,同方向同频率的简谐振动合成后仍为一简谐振动,其频率与分振动频率相同,合振动的振幅、相位由两分振动的振幅 A_1 、 A_2 及初相位 φ_{10} 、 φ_{20} 决定。

利用旋转矢量讨论上述问题则更为简洁直观。如图 5.12 所示,所示取坐标轴 Ox ,画出两分振动的旋转矢量 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$,它们与 x 轴的夹角分别为 φ_{10} 和 φ_{20} ,并以相同角速度 ω 逆时针方向旋转。因两分矢量 $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ 的夹角恒定不变,所以合矢量 $\mathbf{A}$ 的模保持不变,而且同样以角速度 ω 旋转。图中矢量 $\mathbf{A}$ 即 $t = 0$ 时的合成振动矢量,任一时刻合振动的位移等于该时刻 $\mathbf{A}$ 在 x 轴上的投影,即

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

可见合振动是振幅为 A 、初相位为 φ_0 的简谐振动,其圆频率与两分振动相同,和前文结论一致。利用图中几何关系,可求得合振动的振幅 A 、初相位 φ_0 分别为(5.29)、(5.30)两式。

现进一步讨论合振动的振幅与两分振动相位差之间的关系。由式(5.29)可知:

(1) 相位差 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm 2k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 \quad (5.31)$$

即两分振动相位相同时,合振幅等于两分振动振幅之和,合成振幅最大。

(2) 相位差 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm (2k + 1)\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| \quad (5.32)$$

即两分振动相位相反时,合振幅等于两分振幅之差的绝对值,合成振幅最小。

一般情况下,两分振动既不同相亦非反相,合振幅在 $A_1 + A_2$ 与 $|A_1 - A_2|$ 之间。

同方向同频率简谐振动的合成原理,在讨论声波、光波及电磁辐射的干涉和衍射时经常用到。

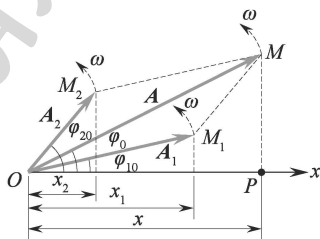


图 5.12 旋转矢量法求同一直线两简谐振动的合成

5.4.2 同方向不同频率简谐振动的合成

设质点同时参与两个同方向,但频率分别为 ω_1 和 ω_2 的简谐振

动. 为突出频率不同引起的效果, 设两分振动的振幅相同, 且初相均等于 φ , 即

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

合振动的位移为

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

利用三角恒等式可求得

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi\right) \quad (5.33)$$

由上式可知, 合振动不是简谐振动. 但若两分振动的频率满足 $\omega_2 + \omega_1 \gg |\omega_2 - \omega_1|$, 则合振动表现出非常值得注意的特点. 这时式(5.33)中第一项因子 $2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t$ 的周期要比另一因子 $\cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t$ 的周期长得多. 于是可将式(5.33)表示的运动看作是振幅按照 $|2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t|$ 缓慢变化, 而圆频率等于 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 的“准简谐振动”, 这是一种振幅有周期性变化的“简谐振动”. 或者说, 合振动描述的是一个高频振动受到一个低频振动调制的运动, 如图 5.13 所示. 这种振幅时大时小的现象叫作“拍”.

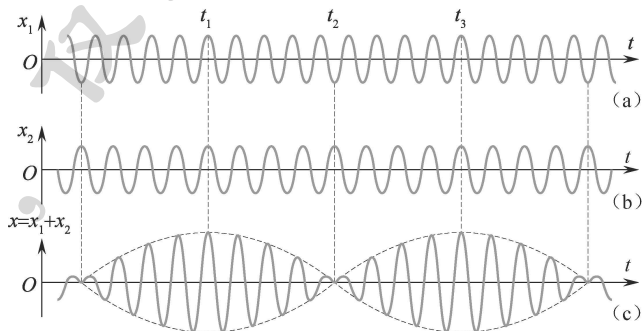


图 5.13 拍的形成

合振幅每变化一个周期称为一拍, 单位时间内拍出现的次数(合振幅变化的频率)叫作拍频. 由于振幅只能取正值, 因此拍 $|2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t|$ 的圆频率应为调制频率的 2 倍, 即

$$\omega_{\text{拍}} = |\omega_2 - \omega_1|$$

$$\text{于是拍频为 } \nu_{\text{拍}} = \frac{\omega_{\text{拍}}}{2\pi} = \left| \frac{\omega_2}{2\pi} - \frac{\omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1| \quad (5.34)$$

这就是说, 拍频等于两个分振动频率之差.

拍现象在声振动、电磁振荡和波动中经常遇到. 例如, 当两个频率相近的音叉同时振动时, 就可听到时强时弱的“嗡、嗡……”的拍音. 人耳能区分的拍音低于每秒 7 次. 利用拍现象还可以测定振动

频率,校正乐器和制造拍振荡器等。

上述关于拍现象的讨论只限于线性叠加。当两个不同频率的分振动出现物理上非线性耦合时,就可能出现“同步锁模”现象,即两个振动系统锁定在同一频率上。历史上首先注意这种现象的是17世纪的惠更斯,偶然的因素使他发现了家中挂在同一木板墙壁上的两个挂钟因相互影响而同步的现象。以后的观察表明,这种锁模现象也发生在“生物钟”内。在电子示波器中,人们充分利用这一原理把波形锁定在屏幕上。

*5.4.3 振动的频谱分析

由上面讨论可知,几个不同频率的简谐振动合成后可成为一个复杂的振动。反之,一个复杂的振动也可以分解成若干个或无穷多个简单的简谐振动。确定一个复杂振动能包含的各种简谐振动的频率及其对应的振幅称为**频谱分析**。

在数学上,一个周期为 T 的周期函数可表示为

$$x(t+T) = x(t) \quad (5.35)$$

按傅里叶级数展开为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \quad (5.36)$$

式中

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

这就是说,如果把周期振动 $x(t)$ 看成一个复杂的振动,则这一振动可以看成是许多简谐振动的叠加,或者说,可以分解成许多个简谐振动。这些简谐振动中有一个最小的频率 ν_0 ,称为**基频**,其他频率都是基频的整数倍,为 $n\nu_0$,例如 $2\nu_0, 3\nu_0, \dots$,它们分别称为二次,三次,……**谐波**。不同的振动分解为简谐振动时,式(5.36)中的系数 a_n, b_n 是不同的, a_n, b_n 表示 n 次谐频振动的振幅,它可以反映各种频率的振动在合振动中所占的比例。

例如,图 5.14 所示的方波,根据数学计算有

$$x = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sin \omega t + \frac{2A}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2A}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

式中第一项可看成周期为无穷大的零频项,第二、三、四项就是频率分别为 $\nu_0, 3\nu_0, 5\nu_0$ 的简谐振动,其振动曲线分别如图 5.14(b)、(c)、(d) 所示,它们的合振动曲线就接近方波了。所取项数越多,则合成波越接近方波。如果以频率为横坐标,各频率对应的振幅为纵坐标,可作出如图 5.15 所示的频谱图。频谱图上可直观地反映出不同频率的振动在合振动中所占的比例。对于周期振动,其频谱图是分立的,对于非周期振动,例如脉冲等,其频谱图是连续的。这是因为,非周期振动的傅里叶展开是一个积分。即

$$x = f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (5.37)$$

频谱分析是一种很有用的方法。例如,用钢琴、提琴、手风琴等演奏同一音阶时,我们能分辨出是由哪几种乐器在演奏。因为它们虽然基频相同,但谐频不同,或者说频谱不同。只要做出各种乐器的频谱图,就可以用电子琴来模拟。频谱分析还在机械制造、地震学、电子技术、光谱分析中有重要的应用。

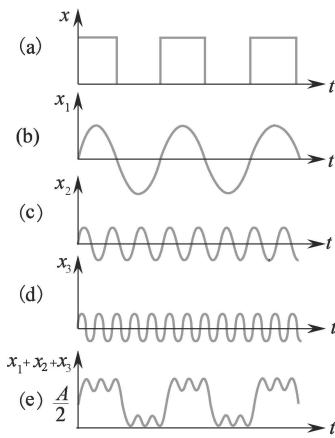


图 5.14 “方波”的分解

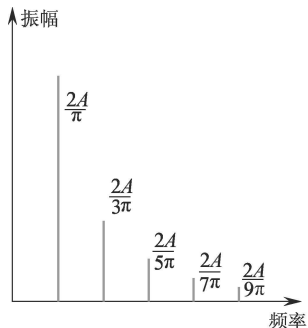


图 5.15 频谱图

例 5.5

已知两个简谐振动的 $x-t$ 曲线如图 5.16 所示, 它们的频率相同, 求它们的合振动方程.

解 由图中曲线可以看出, 两个简谐振动的振幅相同, $A_1 = A_2 = A = 5 \text{ cm}$, 周期均为 $T = 0.1 \text{ s}$, 因而圆频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi$$

由 $x-t$ 曲线(1)可知, 简谐振动(1)在 $t = 0$ 时, $x_{10} = 0$, $v_{10} > 0$, 因此可求出(1)振动的初相位

$$\varphi_{10} = -\frac{\pi}{2}.$$

又由 $x-t$ 曲线(2)可知, 简谐振动(2)在 $t = 0$ 时, $x_{20} = -5 \text{ cm} = -A$, 因此可求出(2)振动的初相位 $\varphi_{20} = \pm\pi$.

由上面求得的 A 、 ω 和 φ_{10} 、 φ_{20} , 可写出振动(1)和(2)的振动方程分别为

$$x_1 = 5\cos(20\pi t - \frac{\pi}{2}) \text{ cm}$$

$$x_2 = 5\cos(20\pi t \pm \pi) \text{ cm}$$

因此合振动的振幅和初相位分别为

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$= \sqrt{2A^2 + 2A^2 \times 0} = \sqrt{2}A = 5\sqrt{2}$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}} = \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{5}{4}\pi$$

但由 $x-t$ 曲线可知 $t = 0$ 时, $x = x_1 + x_2 = -5 \text{ cm}$,

因此, φ_0 应取 $\frac{5}{4}\pi$, 故合成简谐振动方程为

$$x = 5\sqrt{2}\cos\left(20\pi t + \frac{5}{4}\pi\right) \text{ cm}.$$

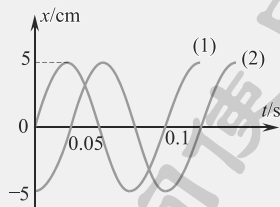


图 5.16

事实上, 从 $x-t$ 曲线分析出两个分振动(1)和(2)的振动方程后, 用旋转矢量法求合振动方程更简单一些. 如图 5.17 所示, 在取定了 Ox 轴的原点后, 分别画出两个旋转矢量 $\vec{OM}_1$ 和 $\vec{OM}_2$ 代表两个简谐振动(1)和(2), 其中 $OM_1 = OM_2 = 5 \text{ cm}$, 由 $\vec{OM}_1$ 与 $\vec{OM}_2$ 两个矢量合成的矢量 $\vec{OM}$ 就是代表合振动的旋转矢量, 由矢量合成的方法, 从图中很容易求出合振动振幅和初相位分别为

$$A' = \sqrt{2} OM_1 = 5\sqrt{2} \text{ cm}, \quad \varphi_0 = \frac{5}{4}\pi.$$

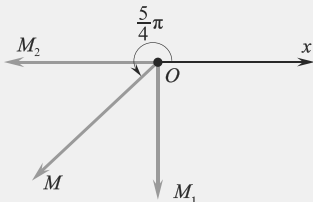


图 5.17

合振动方程为

$$x = 5\sqrt{2}\cos\left(20\pi t + \frac{5}{4}\pi\right) \text{ cm}$$

*5.4.4 两个相互垂直的同频率简谐振动的合成

上面讨论了同一直线上两个简谐振动的合成, 另外也存在方向不同的两个简谐振动的合成问题. 在后一类问题中, 特别是两简谐振动相互垂直的情况, 在电学、光学中有着广泛而重要的应用.

当一个质点同时参与两个不同方向的简谐振动时, 质点的位移是这两个振动的位移的矢量和. 在一般情况下, 质点将在平面上作曲线运动. 质点轨道的各种形状由两个振动的频率、振幅和相位差等决定. 下面先讨论两个相互垂直的同频率简谐振动的合成情况.

设质点同时参与两个相互垂直方向上的简谐振动, 一个沿 x 轴方向, 另一个沿 y 轴方向, 并且两振动频率相同, 以质点的平衡位置为坐标原点, 两个振

动方程分别为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

在任何时刻 t , 质点的位置是 (x, y) ; t 改变时, (x, y) 也改变. 所以这两个方程就是含参变量 t 的质点的运动方程, 消去时间参数 t , 便得到质点合振动的轨道方程:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \sin^2(\varphi_{20} - \varphi_{10}) \quad (5.38)$$

由上式可知, 质点合振动的轨道一般为椭圆, 如图 5.18 所示. 因为质点在两个垂直方向上的位移 x 和 y 只在一定范围内变化, 所以, 椭圆轨道不会超出以 $2A_1$ 和 $2A_2$ 为边长的矩形范围. 当两个分振动振幅 A_1 、 A_2 给定时, 椭圆的其他性质(长短轴及方位)由两个分振动的相位差 $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 决定. 下面讨论几种特殊情况:

(1) $\varphi_{20} - \varphi_{10} = 0$, 即两个分振动相位相同, 这时式(5.38)变为

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

即 $y = \frac{A_2}{A_1}x$ 或 $\frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2}$

合振动的轨迹为通过原点且在第一、第三象限内的直线, 其斜率为两个分振动的振幅之比 $\frac{A_2}{A_1}$, 如图 5.19(a) 所示. 在任一时刻 t , 质点离开平衡位置的位移(即合振动的位移)为

$$S = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

上式表明, 这种情况下合振动也是谐振动, 且与原来两个分振动频率相同, 但振幅为 $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

(2) $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pi$, 即两个分振动相位相反, 当其中一个分振动达到正最大时, 另一个达到负最大, 此时式(5.38)变为

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

即 $\frac{x}{A_1} = -\frac{y}{A_2}$ 或 $y = -\frac{A_2}{A_1}x$

其合振动的轨迹仍为一直线(在二、四象限内), 但直线的斜率为 $\left(-\frac{A_2}{A_1}\right)$. 质点将在此直线上作振幅为 $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 、圆频率为 ω 的谐振动, 如图 5.19(b) 所示.

(3) $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \frac{\pi}{2}$, 即 y 方向上的分振动比 x 方向上的分振动超前 $\frac{\pi}{2}$, 此时式(5.38)变为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

即合振动的轨迹为以 x 轴和 y 轴为轴线的椭圆, 两个半轴分别为 A_1 和 A_2 , 如图 5.19(c) 所示. 这时两个分振动方程为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_{10} + \frac{\pi}{2}\right)$$

当某一瞬时 $(\omega t + \varphi_{10}) = 0$ 时, 则 $x = A_1$, $y = 0$, 质点在图中 P 点; 下一瞬间, 有 $(\omega t + \varphi_{10}) > 0$, 因而此时 x 将略小于 A_1 , 同时此瞬间的 $\left(\omega t + \varphi_{10} + \frac{\pi}{2}\right)$ 略大于 $\frac{\pi}{2}$, 故 $y < 0$, 质点将处于第四象限, 因此可判定质点沿椭圆的运动方向是顺时

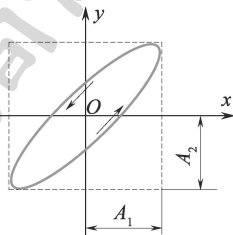


图 5.18 两个相互垂直简谐振动的合成

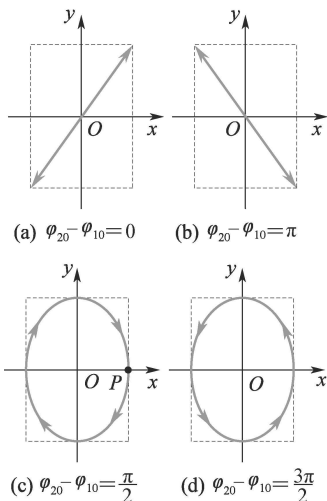


图 5.19 几个不同相位差的垂直振动的合成轨迹

针的.

(4) $\varphi_{20} - \varphi_{10} = -\frac{\pi}{2}$, 即 x 方向上的分振动比 y 方向上的分振动超前 $\frac{\pi}{2}$, 与上面(3)中类同的分析知, 合振动的轨迹仍为以 x 轴和 y 轴为轴线的椭圆, 如图 5.19(d) 所示, 但质点的运动方向与以上相反.

在上面(3)和(4)中, 若两个分振动的振幅相同, 即 $A_1 = A_2$, 则合振动的轨迹为一圆周.

上面是几种特殊情形, 一般情况下, 若两个分振动的相位差取其他数值, 则合振动的轨迹将为形状与方位各不相同的椭圆, 质点的运动方向则可能为顺时针或逆时针, 如图 5.20 所示.

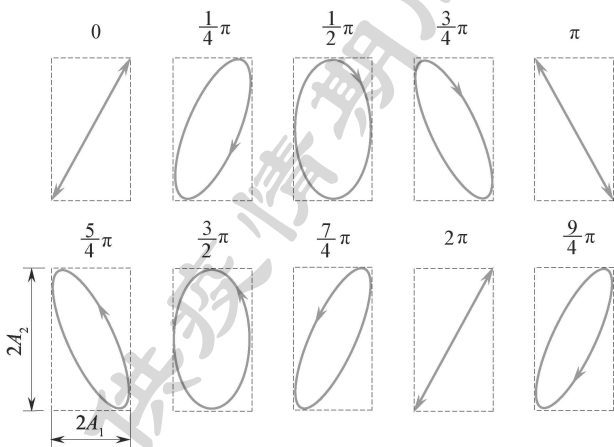


图 5.20 两个相互垂直的振幅不同频率相同的简谐振动的合成

总之, 一般来说, 两个振动方向相互垂直的同频率的简谐振动合成的结果, 合振动轨迹为一直线、圆或椭圆. 轨道的具体形状、方位和运动方向由分振动的振幅和相位差决定. 在电子示波器中, 若使相互垂直的正弦变化的电学量频率相同, 就可以在屏上观察到合振动的轨迹.

以上讨论也说明: 任何一个直线简谐振动、椭圆运动或匀速圆周运动都可以分解为两个相互垂直的同频率的谐振动.

* 5.4.5 两个相互垂直的不同频率简谐振动的合成

一般来说, 两个相互垂直的不同频率的谐振动, 由于它们的相位差不是定值, 其合振动的轨迹不能形成稳定的图案. 如果两个分振动的频率相差很小, 则合振动的轨迹将不断地按图 5.21 所示的顺序连续地过渡重复变化. 如果两个分振动的频率成整数比, 则合成振动的轨迹为一封闭的稳定曲线, 曲线的花样与两分振动的周期比、初相位以及初相位差有关, 得出的图形叫李萨如图形. 图 5.21 给出了沿 x 轴和 y 轴的两个分振动的周期比分别为 $T_1 : T_2 = 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 2 : 3$ 时几种不同初相位的李萨如图形. 在电子示波器中, 若使相互垂直的按正弦规律变化的电学量周期成不同的整数比, 就可在荧光屏上看到各种不同的李萨如图形.

由于图形花样与两个分振动的频率比有关, 因此可以通过李萨如图形的花样来判断两个分振动的频率比, 进而由一个振动的已知频率求得另一个振

动的未知频率,这是无线电技术中常用的测定未知频率的方法之一.

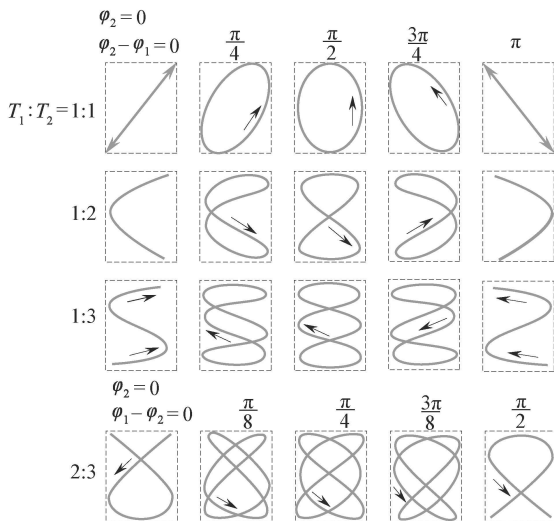


图 5.21 李萨如图形

5.5 阻尼振动 受迫振动 共振

5.5.1 阻尼振动

前面所讨论的谐振动是一种理想状况,即谐振子系统作无阻尼(无摩擦和辐射损失)的自由振动.它是等幅振动.而在实际中,阻尼是不可消除的,如没有能量补充,由于机械能有损耗,其振幅将不断地衰减.这种振幅随时间不断衰减的振动叫作**阻尼振动**.

下面讨论的是谐振子系统受到弱介质阻力而衰减的情况.弱介质阻力是指当振子运动速度较低时,介质对物体的阻力仅与速度的一次方成正比,即这时阻力为

$$f_r = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \quad (5.39)$$

γ 称为阻力系数,与物体的形状、大小、物体的表面性质及介质性质有关.

仍以弹簧振子为例,这时振子的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{\gamma}{m}$, 上式可化成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.40)$$

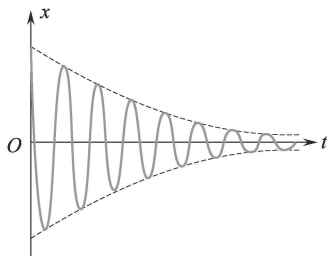


图 5.22 阻尼振动

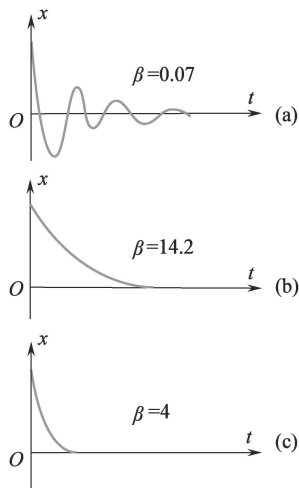


图 5.23 阻尼振动三种情况的比较(图(c)表示临界阻尼情况)

式中 ω_0 是系统的固有角频率, β 称阻尼系数。

式(5.40)的解,与阻尼的大小有关。当 $\beta \ll \omega_0$ 时,称为弱阻尼,其方程的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.41)$$

式中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, A_0 和 φ_0 依然是由初始条件确定的两个积分常数。阻尼振动的位移随时间变化的曲线如图 5.22 所示,图中虚线表示阻尼振动的振幅 $A_0 e^{-\beta t}$ 随时间 t 按指数衰减,阻尼越大(在 $\beta \ll \omega_0$ 范围内)振幅衰减越快。阻尼振动的准周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (5.42)$$

可见,阻尼振动的周期比系统的固有周期长。

若 $\beta = \omega_0$,称为临界阻尼,这时式(5.40)的解为

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t} \quad (5.43)$$

此时系统不作往复运动,而是较快地回到平衡位置并停下来。如图 5.23(c) 所示。

若 $\beta > \omega_0$,称为过阻尼,此时方程的解为

$$x = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (5.44)$$

这时系统也不作往复运动,而是非常缓慢地回到平衡位置,如图 5.23(b) 所示。

在实用中,常利用改变阻尼的方法来控制系统振动情况。例如,各类机器的防震器大多采用一系列的阻尼装置;有些精密仪器,如物理天平、灵敏电流计中装有阻尼装置并调至临界阻尼状态,使测量快捷、准确。

5.5.2 受迫振动

阻尼振动又称减幅振动。要使有阻尼的振动系统维持等幅振动,必须给振动系统不断地补充能量,即施加持续的周期性外力作用。振动系统在周期性外力作用下发生的振动叫作受迫振动。这个周期性外力叫作策动力。

为简单起见,假设策动力取如下形式

$$F = F_0 \cos pt \quad (5.45)$$

式中 F_0 为策动力的幅值, p 为策动力的频率,这种策动力又称谐和策动力。

仍以弹簧振子为例,讨论弱阻尼谐振子系统在谐和策动力作用下的受迫振动,其动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos pt \quad (5.46)$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{\gamma}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$, 可得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos pt \quad (5.47)$$

该方程的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(pt + \varphi) \quad (5.48)$$

由微分方程理论可知, 解的第一项实际上是式(5.40)在弱阻尼下的通解, 随着时间的推移, 很快就会衰减为零, 故第一项称为衰减项. 第二项才是稳定项, 即式(5.47)的稳定解为

$$x = A \cos(pt + \varphi) \quad (5.49)$$

可见, 稳定受迫振动的频率等于策动力的频率.

将式(5.49)代入式(5.47), 并采用待定系数法可确定稳定受迫振动的振幅为

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}} \quad (5.50)$$

这说明, 稳定受迫振动的振幅与系统的初始条件无关, 而是与系统固有频率、阻尼系数及策动力频率和幅值均有关的函数.

5.5.3 共振

共振是受迫振动中一个重要而具有实际意义的现象, 下面分别从位移共振和速度共振两方面加以讨论.

1. 位移共振

由式(5.50)可知, 对于一个给定振动系统, 当阻尼和策动力幅值不变时, 受迫振动的位移振幅是策动力角频率 p 的函数, 它存在一个极值. 受迫振动的位移达极大值的现象称为位移共振. 将式(5.50)对 p 求导并令 $\frac{dA}{dp} = 0$, 可求出位移共振的角频率满足

$$p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (5.51)$$

显然, 共振位移的大小与阻尼有关, 其关系如图 5.24 所示.

2. 速度共振

系统作受迫振动时, 其速度也是与策动力角频率相关的函数, 即

$$v = -pA \sin(pt + \varphi) = -v_m \sin(pt + \varphi)$$

$$\text{式中 } v_m = pA = \frac{pf_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}} \quad (5.52)$$

称为速度振幅, 同样可求出当

$$p_v = \omega_0 \quad (5.53)$$

时, 速度振幅有极大值, 这种现象称为速度共振, 如图 5.25 所示. 进一步的研究表明, 当系统发生速度共振时, 外界能量的输入处于最佳状态, 即策动力在整个周期内对系统做正功, 用以补偿阻尼引起的能耗. 因此, 速度共振又称为能量共振. 在弱阻尼情况下, 位移共振与速度共振的条件趋于一致, 所以一般可以不必区分两种共振.

共振现象在光学、电学、无线电技术中应用极广. 如收音机的“调谐”就是利用了“电共振”. 此外, 如何避免共振对桥梁、烟囱、水坝、高楼等建筑物的破坏, 也是设计制造者必须考虑的问题.



共振的条件和特征



共振的应用与危害

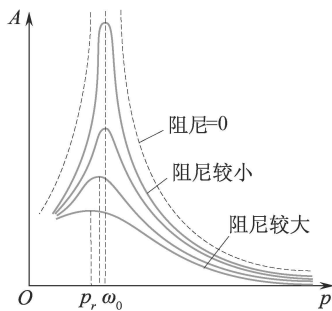


图 5.24 位移共振曲线

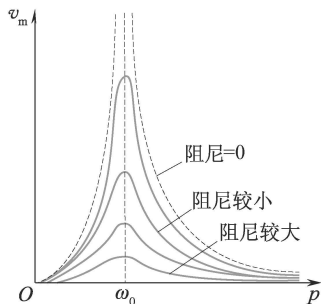


图 5.25 速度共振曲线

例 5.6

一转动惯量为 J 、半径为 R 的定滑轮,如图 5.26 所示.一轻绳绕过该定滑轮,一端系一质量为 m 的物体,另一端与一倔强系数为 k ,且另一端固定的轻质弹簧相连.现将物体从平衡位置沿竖直方向移动一微小距离后轻释放.试分析该物体的运动,并求其运动的周期.(不考虑物体、绳子与滑轮、与空气间的摩擦)

解 如图 5.26 所示.选取物体悬挂于弹簧上处于平衡时位置点为坐标原点 O 、竖直向下为 x 轴的正方向.

物体在原点 O 时,物体的重力势能为零,弹簧的伸长量为 x_0 ,弹簧的弹性势能及系统的初始机械能为 $E_0 = kx_0^2/2$,且有 $kx_0 = mg$.

任意位置 x 处,弹簧的伸长量为 $x_0 + x$ 、物体的速率为 v .再利用系统机械能守恒有

$$E = mv^2/2 + J\omega^2/2 - mgx + k(x + x_0)^2/2$$

利用 $v = R\omega$, $kx_0 = mg$ 代入到上式中后,分析简化有

$$E - kx_0^2/2 = v^2[m + (J/R^2)]/2 + kx^2/2 = \text{常量}$$

对上式,令 $m' = m + J/R^2$,则上式简化为

$$\frac{1}{2}m'v^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常量}$$

将上式两边对时间 t 求导,可得

$$m'v \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

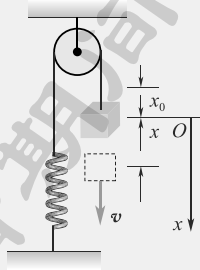


图 5.26 例 5.6 图

因为任意时刻速度 $v = dx/dt \neq 0$,再对上式两边同时除以 v ,有

$$m' \frac{dv}{dt} + kx = 0$$

又假设 $\omega^2 = k/m'$,则有 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 微分方程成立.表明由该物体、弹簧等构成的系统的运动为简谐振动.其周期

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{m + (J/R^2)} / \sqrt{kR^2}$$

习 题

5.1 选择题.

(1) 一物体作简谐振动,振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$,则该物体在 $t=0$ 时刻的动能与 $t=T/8$ (T 为振动周期) 时刻的动能之比为 ()

- A. 1 : 4. B. 1 : 2.
C. 1 : 1. D. 2 : 1.

(2) 弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时,弹性力在半个周期内所做的功为 ()

- A. kA^2 . B. $kA^2/2$.
C. $kA^2/4$. D. 0.

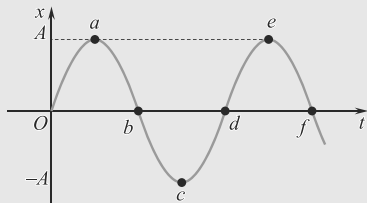
(3) 简谐振动过程中,动能和势能相等的位置的位移等于 ()

- A. $\pm \frac{A}{4}$. B. $\pm \frac{A}{2}$.
C. $\pm \frac{\sqrt{3}A}{2}$. D. $\pm \frac{\sqrt{2}A}{2}$.

5.2 填空题

(1) 一质点在 x 轴上作简谐振动,振幅 $A = 4$ cm, 周期 $T = 2$ s, 其平衡位置取作坐标原点.若 $t = 0$ 时质点第一次通过 $x = -2$ cm 处且向 x 轴负方向运动,则质点第二次通过 $x = -2$ cm 处的时刻为 _____ s.

(2) 一水平弹簧简谐振子的振动曲线如题5.2(2)图所示. 振子在位移为零, 速度为 $-\omega A$ 、加速度为零和弹性力为零的状态, 对应于曲线上的 _____ 点. 振子处在位移的绝对值为 A 、速率为零、加速度为 $-\omega^2 A$ 和弹性力为 $-kA$ 的状态, 则对应曲线上的 _____ 点.



题 5.2(2) 图

(3) 一质点沿 x 轴作简谐振动, 振动范围的中心点为 x 轴的原点, 已知周期为 T , 振幅为 A .

(a) 若 $t=0$ 时质点过 $x=0$ 处且朝 x 轴正方向运动, 则振动方程为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) 若 $t=0$ 时质点过 $x=A/2$ 处且朝 x 轴负方向运动, 则振动方程为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

5.3 符合什么规律的运动才是简谐振动? 分别分析下列运动是不是简谐振动:

(1) 拍皮球时球的运动;

(2) 如题 5.3(2) 图所示, 一小球在一个半径很大的光滑凹球面内滚动(设小球所经过的弧线很短).



题 5.3(2) 图

5.4 弹簧振子的振幅增大到原振幅的两倍时, 其振动周期、振动能量、最大速度和最大加速度等物理量将如何变化?

5.5 单摆的周期受哪些因素影响? 把某一单摆由赤道拿到北极去, 它的周期是否变化?

5.6 简谐振动的速度和加速度在什么情况下是同号的? 在什么情况下是异号的? 加速度为正值时, 振动质点的速率是否一定在增大?

5.7 质量为 10×10^{-3} kg 的小球与轻弹簧组成的系统, 按 $x = 0.1 \cos(8\pi t + \frac{2\pi}{3})$ (SI) 的规律作简谐振动, 求:

(1) 振动的周期、振幅、初相位及速度与加速度的最大值;

(2) 最大的回复力、振动能量、平均动能和平均势能, 在哪些位置上动能与势能相等?

(3) $t_2 = 5$ s 与 $t_1 = 1$ s 两个时刻的相位差.

5.8 一个沿 x 轴作简谐振动的弹簧振子, 振幅为 A , 周期为 T , 其振动方程用余弦函数表出. 如果 $t=0$ 时质点的状态分别是:

(1) $x_0 = -A$; (2) 过平衡位置向正向运动;

(3) 过 $x = \frac{A}{2}$ 处向负向运动; (4) 过 $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$

处向正向运动.

试求出相应的初相位, 并写出振动方程.

5.9 一质量为 10×10^{-3} kg 的物体作简谐振动, 振幅为 24 cm, 周期为 4.0 s, 当 $t=0$ 时位移为 $+24$ cm. 求:

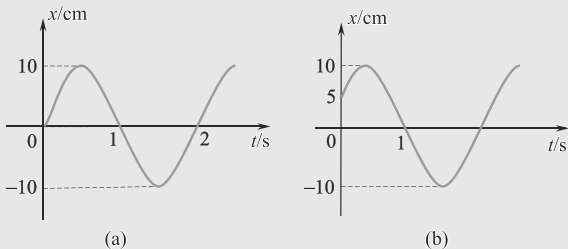
(1) $t=0.5$ s 时, 物体所在的位置及此时所受力的大小和方向;

(2) 由起始位置运动到 $x=12$ cm 处所需的最短时间;

(3) 在 $x=12$ cm 处物体的总能量.

5.10 有一轻弹簧, 下面悬挂质量为 1.0 g 的物体时, 伸长为 4.9 cm. 用这个弹簧和一个质量为 8.0 g 的小球构成弹簧振子, 将小球由平衡位置向下拉开 1.0 cm 后, 给予向上的初速率 $v_0 = 5.0$ cm/s, 求振动周期和振动表达式.

5.11 题 5.11 图为两个谐振动的 $x-t$ 曲线, 试分别写出其简谐振动方程.



题 5.11 图

5.12 一轻弹簧的倔强系数为 k , 其下端悬有一质量为 M 的盘子. 现有一质量为 m 的物体从离盘底 h 高度处自由下落到盘中并和盘子粘在一起, 于是盘子开始振动.

(1) 此时的振动周期与空盘子作振动时的周期有何不同?

(2) 此时的振动振幅多大?

(3) 取物体和盘子受力为零的位置为原点, 位移以向下为正, 并以弹簧开始振动时作为计时起点, 求初相位并写出物体与盘子的振动方程.

5.13 有一单摆, 摆长 $l = 1.0$ m, 摆球质量 $m =$

$10 \times 10^{-3} \text{ kg}$, 当摆球处在平衡位置时, 若给小球一水平向右的冲量 $F\Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, 取打击时刻为计时起点 ($t = 0$), 求振动的初相位和角振幅, 并写出小球的振动方程.

5.14 有两个同方向同频率的简谐振动, 其合成振动的振幅为 0.20 m , 相位与第一振动的相位差为 $\frac{\pi}{6}$, 已知第一振动的振幅为 0.173 m , 求第二个振动的振幅以及第一、第二两振动的相位差.

5.15 试用最简单的方法求出下列两组谐振动合成后所得合振动的振幅:

$$(1) \begin{cases} x_1 = 5\cos(3t + \frac{\pi}{3}) \text{ cm} \\ x_2 = 5\cos(3t + \frac{7\pi}{3}) \text{ cm} \end{cases}$$

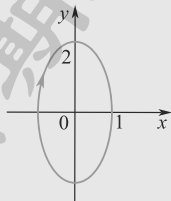
$$(2) \begin{cases} x_1 = 5\cos(3t + \frac{\pi}{3}) \text{ cm} \\ x_2 = 5\cos(3t + \frac{4\pi}{3}) \text{ cm} \end{cases}$$

5.16 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动, 振动方程为

$$\begin{cases} x_1 = 0.4\cos(2t + \frac{\pi}{6}) \text{ m} \\ x_2 = 0.3\cos(2t - \frac{5}{6}\pi) \text{ m} \end{cases}$$

试分别用旋转矢量法和振动合成法求合振动的振幅和初相位, 并写出谐振动方程.

* 5.17 如题 5.17 图所示, 两个相互垂直的谐振动的合振动图形为一椭圆, 已知 x 方向的振动方程为 $x = 6\cos 2\pi t \text{ cm}$, 求 y 方向的振动方程.



题 5.17 图



本章习题参考答案